Сычугов Д.Ю., МГУ ВМК

Online семинары для студентов 2 курса
(201 группа)

Математический анализ

Числовые ряды. Занятие 5

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 5

Сыцуго В.Д. Ю,
группа 201

Бесконечные произведения

Теория: **определение 1** $\{a_k\}$ - числ. посл., все $a_k > 0$. $P_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$.

Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} P_n = P$, $\underbrace{P \neq 0,\ P \neq \infty}$, то $P \overset{def}{=} \prod\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **(1)**, и бесконечное произведение называют сходящимся. Если $P=0$, и все $a_k \neq 0$, то произвед. (1) расходящимся к 0.

Теорема 1 (необх. условие сход.) Произв. (1) сходится $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_k = 1$.

$\boxed{\text{Теорема 2 (необх. и дост. усл. сход) Произв (1) сход.} \Leftrightarrow \text{сход. ряд } \sum_{k=1}^{\infty} \ln a_k \ \textbf{(2)}}$

Теорема 3 (необх. и дост. усл. сход). если $a_k = 1 + b_k$, и $\{b_k\}$ не меняет знака то произв. (1) сход. $\Leftrightarrow$ сход. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k - 1)$ **(3)**

Comment: Теорема 3 доказывается с помощью теоремы 2, и, в сущности, является ее следствием.

Докажите самостоятельно теорему 3, опираясь на т. 2 и условие, что b_k не меняет знака.

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 5

Теорема 4 Пусть $a_k = 1 + b_k$ и $\{b_k\}$ не сохраняет знака, но ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ (3) сход., то ряд (1) сход. либо расх. к нулю $\Leftrightarrow$ сход. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k^2$ (4)

Определение 2 Произвед. (1) называют абсолютно сход., если абс. сход ряд (2), и условно сход., если ряд (2) сход. условно.

Теорема 5 Произв. (1) сход. абс. $\Leftrightarrow$ абс. сход ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ (3)

Формула Валлиса $\frac{\pi}{2} = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\ldots$ (5)

$\boxed{3061}$ $\prod\limits_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-4}{n^2-1} = ?$

$$P_n = \prod_{k=3}^{n} \frac{k^2-4}{k^2-1} = \frac{(3-2)(3+2)}{(3-1)(3+1)} \cdot \frac{(4-2)(4+2)}{(4-1)(4+1)} \cdot \frac{(5-2)(5+2)}{(5-1)(5+1)} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-2)(n+2)}{(n-1)(n+1)} =$$

$$= \frac{1\cdot 5}{2\cdot 4} \cdot \frac{2\cdot 6}{3\cdot 5} \cdot \frac{3\cdot 7}{4\cdot 6} \cdot \frac{4\cdot 8}{5\cdot 7} \cdot \frac{5\cdot 9}{6\cdot 8} \ldots = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots (n-2)}{2\cdot 3\cdot 4 \ldots (n-1)} \cdot \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot \ldots (n+2)}{4\cdot 5\cdot \ldots (n+1)} =$$

$$= \frac{(n-2)!}{(n-1)!} \cdot \frac{(n+2)!/4!}{(n+1)!/3!} = \frac{1}{4} \frac{n+2}{n-1} \to \frac{1}{4}$$

Ответ: сход. к $1/4$

$\boxed{3055}$ $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}$?

$$P_n = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} \Rightarrow P_n \cdot \sin\frac{\pi}{2^{n+1}} = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \ldots \underbrace{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} \sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}_{=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2^n}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{4} \ldots \underbrace{\cos\frac{\pi}{2^n} \sin\frac{\pi}{2^n}}_{=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2^2} \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \ldots \cos\frac{\pi}{2^{n-1}} = \ldots \frac{1}{2^n} \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{2^{n+1}} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{\sin(\pi/2^{n+1})}{\pi/2^{n+1}} \to \frac{2}{\pi}$$

– доказано

$\boxed{3065}$ $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ - сход, $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ - сход. Сходятся ли:

1) $\prod_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n)$?

Нет, т.к. $p_n \to 1$, $q_n \to 1 \Rightarrow p_n + q_n \to 2 \neq 1$ не вып. необх усл.

2) $\prod_{n=1}^{\infty} p_n^2$?

$\sum_{k=1}^{n} \ln p_k^2 = 2 \sum_{k=1}^{n} \ln p_k$ - сход. $\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} p_n^2$ - сход

3) $\prod_{n=1}^{\infty} (p_n q_n)$ - сход., $\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ - сход, док-во аналогично

СЕМЕСТР 1, СЕМИНАР 5

3068 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$ $\quad \ln a_n = \frac{1}{n^p} - \frac{1}{2n^{2p}} + \bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{n^{2n}}\right)$

сход. абс. $p>1$

расх. $p\le 1$

3090 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$; $\ln a_n = \frac{(-1)^n}{n^p} + \frac{1}{2n^{2p}} + \bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$

1) Произведение сход, если $p>1/2$ 2) Произв. сход абс. при $p>1$

3099 $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1+\alpha_n)$? $\quad \alpha_n = \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{k}}, & n=2k-1 \\ \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}, & n=2k \end{cases}$

Группируем члены произв. по 2

$a_n = 1+\alpha_n \to 1.$ $\quad a_n \cdot a_{n+1} = \left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k\sqrt{k}}\right) =$

$= 1 + \cancel{\frac{1}{\sqrt{k}}} + \cancel{\frac{1}{k}} + \cancel{\frac{1}{k\sqrt{k}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{k}}} - \cancel{\frac{1}{k}} - \cancel{\frac{1}{k\sqrt{k}}} - \frac{1}{k^2} = -\frac{1}{k^2} \Rightarrow \begin{cases} \prod\limits_{n=2}^{\infty}(a_n a_{n+1}) - \text{сх.} \\ a_n \to 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{\prod\limits_{n=2}^{\infty} a_n - \text{сход.}}$ несмотря на то, что $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\alpha_n$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\alpha_n^2$ расх